47-7-2-21

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCIÓN DE FÍSICO-MATEMÁTICAS

Fo 804(16)

TESIS DEL DOCTORADO

ESTUDIOS
SOBRE LA
Inducción Eléctrica

MEMORIA

PRESENTADA POR

FELIPE N. GARÍN MARTÍ

Optando al grado de doctor en Ciencias físico-matemáticas

VALENCIA
Establecimiento tipográfico de Manuel Pau
25, CALLE DE CUARTE, 25
1907

Fo. 804(16)

ESTUDIOS

SOBRE LA

INDUCCIÓN ELÉCTRICA

47-7-2 21

FACULTAD DE CIENCIAS

SECCIÓN DE FÍSICO-MATEMÁTICAS

TESIS DEL DOCTORADO

ESTUDIOS

SOBRE LA

Inducción Eléctrica

MEMORIA

PRESENTADA POR

FELIPE N. GARÍN MARTÍ

Optando al grado de doctor en Ciencias físico-matemáticas

BIBLIOTECA DE LA FACULTAD DE MEDICINA MADRID

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
5316086282

VALENCIA

Establecimiento tipográfico de Manuel Pau

25, CALLE DE CUARTE, 25

1907

SEÑORES:

Entre los muchos descubrimientos que han tenido lugar en el último siglo, pocos hay, á mi ver, de tanta importancia, y de tan variadas aplicaciones para la vida práctica, como la inducción eléctrica. No imaginara Faraday, cuando en 1831 observó, por vez primera, la corriente producida en circuito cerrado por efecto de la inducción; no imaginara, creo yo, que aquellos sencillos experimentos habían de dar lugar en muy pocos años á una de las más importantes teorías físicas, y á una verdadera revolución en la vida social y en el adelanto industrial de las naciones. Tal es la importancia de la inducción y de las corrientes á que ella da lugar; y esto basta para formar concepto de la importancia de su estudio.

Atraído sin duda por tan importantes aplicaciones intenté vadear ese inmenso piélago de la inducción, tocando algo de lo mucho que pudiera decirse, y sobre las propiedades de las corrientes que por ella se producen. Y digo que voy á tratar algo, porque es tal la extensión que han alcanzado estos estudios en tan poco tiempo, que sería verdaderamente imposible intentar un estudio completo, superior á mis fuerzas y á la índole de este trabajo.

Me ceñiré á la sencilla exposición, más ó menos ordenada, de mis impresiones sobre los puntos que más solicitaron mi atención en esta materia, después de haber estudiado detenidamente el asunto, en las obras más clásicas que he podido consultar (1).

Dispensadme si el tema os parece atrevido, pero os aseguro que no hay en ello presunción alguna; sólo trato de cumplir el deber que la ley me impone al obligarme á presentar un trabajo inédito, fruto de mis estudios; confieso francamente que al verme obligado por este deber á elegir un tema, todos me parecían inaccesibles, y es posible que mi propia insuficiencia me haya conducido á optar por el más difícil de cuantos se me han ocurrido, creyendo, de buena fe, que tomaba el más proporcionado á mis fuerzas.

Para dar algún orden á mi trabajo, lo he dividido en tres partes ó secciones:

En la primera, intento establecer la teoría de la inducción, después de discutir qué clase de relación tiene ésta con el principio de conservación de la energía y hasta qué punto puede considerarse la inducción como consecuencia de tal principio.

En la segunda, afirmada la verdadera teoría, comienzo estudiando la variación que sufre la intensidad de la corriente inducida, por efecto de la inducción, viniendo luego á deducir el concepto de fuerza electromotriz de inducción, y establezco la fórmula

(1) Como fuentes de conocimiento para estudiar la materia de mi trabajo, me he servido preferentemente de las siguientes obras:

E. Mascart et J. Joubert.—Leçons sur l'electricité et le magnetisme. (Segunda edición). 1896.—J. Chappuis et A. Berget.—Leçons de physique generale (Segunda edición). 1900.—J. Bertrand.—Leçons sur la theorie mathematique de l'electricité. 1890.—M. Jamin.—Cours de physique de l'ecole polytéchnique. (Cuarta edición). 1891.—F. de P. Rojas.—Electricidad y magnetismo. (Complemento teórico á su Electrodinámica Industrial). 1899.

general de esta fuerza, en función del flujo de fuerza que atraviesa el circuíto; hecho lo cual estudio ligeramente la auto-inducción, y acabo definiendo los coeficientes de inducción, M y L, que he de necesitar después.

Y, finalmente, en la tercera, como aplicación de la fórmulas estudiadas anteriormente, deduzco las leyes de las corrientes de inducción, y termino con un estudio, en forma de apéndice, generalizando algún concepto, y haciendo aplicaciones concretas á las extra-corrientes de cierre y ruptura.

A esto se reduce mi trabajo. He procurado exponerlo con la mayor claridad que he podido, y he tenido buen cuidado de no olvidar nunca que, como dice el Sr. Jiménez Rueda (1), si bien es verdad que la Física Matemática *prevé* los fenómenos que presentaría un cuerpo colocado en determinadas circunstancias, valiéndose para ello de la aplicación del Análisis Matemático á las leyes generales; no es menos cierto que tal aplicación ha de emplearse con mucho cuidado, cerciorándonos bien de la ley que sirve de punto de partida; pero, sobre todo, conviene no dejarse llevar demasiado de la sucesión encadenada de las fórmulas, y cuidar mucho de que los cálculos matemáticos estén siempre dirigidos por un verdadero espíritu físico, para que haciendo un uso racional del Análisis Matemático, podamos hallar verdaderos resultados de previsión.

Expuesto brevemente el plan de mi trabajo, entro desde luego en materia.

(1) Opúsculo «Sobre la constitución molecular de los cuerpos gaseosos».

Sobre la teoría de la inducción

1.—Aplicación del principio de conservación de la energía á una corriente que no trabaja. Sea una corriente de intensidad I, producida por un generador, de fuerza electromotriz E, recorriendo un circuíto de resistencia R.

Recordemos que si una cantidad Q de electricidad, pasa de un punto de potencial V_1, á otro de potencial V_2, siendo V_1 y V_2 constantes, el trabajo eléctrico está expresado por

$$T = Q\,(V_1 - V_2);$$

pero si se trata de un generador de corriente, que da una fuerza electromotriz E, y produce una intensidad I, constante en el tiempo t, por la misma definición de intensidad podemos escribir

$$T = I\,E\,t;$$

y ésta será la expresión del trabajo realizado por el generador en mantener la corriente, ó bien, la energía eléctrica de que podemos disponer.

Si toda la energía eléctrica de la corriente que proponemos se emplea en calentar el hilo, sin producir ningún otro efecto, la ley de Joule nos dice que el calor desarrollado, en el mismo tiempo t, viene expresado por

$$C = R\,I^2\,t.$$

Podemos aplicar ahora el principio de conservación de la energía, puesto que suponemos que toda la energía eléctrica disponible se transforma en energía calorífica, estableciendo la igualdad necesaria entre estos dos valores.

Así tendremos:

$$IEt = RI^2 t; \qquad (1)$$

de donde se deduce fácilmente la siguiente fórmula, que expresa la ley de Ohm:

$$I = \frac{E}{R}. \qquad (2)$$

2.—**Aplicación del principio de conservación de la energía á una corriente que trabaja.**

Supongamos ahora que, permaneciendo fija la corriente del párrafo anterior, se la aproxima otra corriente, de intensidad I'. La corriente I ejercerá su acción sobre la I', y hará, por consiguiente, un trabajo sobre ésta, que expresaré por $GII't$ siendo G un coeficiente que depende de las condiciones geométricas y cinemáticas de la experiencia, es decir, de la forma, de la situación y de la velocidad de los conductores.

Las circunstancias han cambiado ahora respecto del número anterior; ya no es sólo calor lo que se produce, hay aquí, además, un trabajo electrodinámico, que ha de ser producido precisamente á expensas de la pila ó generador, pues no tenemos otra energía disponible, es decir, que la energía EIt del generador ha de producir un efecto calorífico $RI^2 t$, según la ley de Joule, y un efecto mecánico $GII't$. Planteando, pues, la conservación de energía, tendremos:

$$EIt = RI^2 t + GII't,$$

ó bien prescindiendo del factor t:

$$EI = RI^2 + GI'I. \qquad (3)$$

3.—**Contradicción que resulta entre las fórmulas (1) y (3).** A poco que se comparen las fórmulas (1) y (3), se notará la contradicción que existe entre ellas, pues claramente se ve que son incompatibles por la desigualdad de sus segundos miembros, admitido el supuesto de que el trabajo pueda no ser nulo.

¿Cómo explicar esta incompatibilidad?

El principio de conservación de la energía parece estar bien aplicado con arreglo á las circunstancias; dicho principio es indudable, pues en la naturaleza nada se crea ni aniquila; y, sin embargo, las dos fórmulas no pueden ser verdaderas. Algo debe ocurrir, pues, que no hemos tenido en cuenta, algo que nos hace aplicar mal el principio, haciendo aparecer de ese modo la contradicción que nos sorprende.

Veamos si podemos reconocer la causa de tal fenómeno. Recordemos que al estudiar el trabajo del generador en producir la corriente, hemos supuesto constante el valor I de la intensidad, durante el tiempo t que dura el trabajo, pero ¿es admisible esta hipótesis?... ¿pudiera ser ésta la causa de que aparezca la contradicción?...

Pudiera serlo, y partiendo de esta idea, se saca una hermosa explicación de la incompatibilidad entre las fórmulas (1) y (3), y una teoría *á priori* de los fenómenos de inducción.

4.—**¿Resulta de aquí que la inducción, con variación de intensidad, sea una consecuencia necesaria del principio de conservación de la energía?** La idea con que termina el número anterior ha dado lugar, sin duda, á que se haya afirmado que la teoría de los fenómenos de inducción es consecuencia necesaria del principio de conservación de la energía.

Así, por ejemplo, se lee en la obra de Mascart:

«Supongamos ahora que la corriente efectúe un trabajo exterior; la ecuación (1) es entonces defectuosa, puesto que la energía química de la pila ha de proveer al mismo tiempo al calentamiento del circuito y al trabajo realizado; la corriente *debe*, pues, tomar otro valor de intensidad.»

Y en la de Chappuis Berget, dice:

«Imaginemos que se realiza un trabajo: este trabajo no puede ser dado sino por la energía química. Luego es *imposible* que la intensidad conserve su valor primitivo: tomará un nuevo valor, etcétera.....»

Nos parecen infundadas tales afirmaciones, si no se dice más de lo que hasta ahora hemos visto. La única consecuencia necesaria que podemos sacar de la aplicación del principio de conservación,

lo que se deduce inmediatamente del número anterior, es que aquí ocurre algo extraordinario, algún nuevo fenómeno, desconocido hasta ahora, que viene á alterar una de las fórmulas (1) y (3) ó tal vez las dos. Si á ese fenómeno desconocido le llamamos *inducción*, sí que será ésta una consecuencia necesaria del principio de conservación de la energía, pero no podemos afirmar nada acerca de su naturaleza. ¿Será precisamente una variación en la intensidad?... ¿será un fenómeno de otra índole?... Ni lo sabemos, ni nos lo dicen de un modo exclusivo las fórmulas que llevo escritas. Teóricamente, puede explicarse *á priori* de muchas maneras la contradicción de que tratamos; pueden establecerse varias hipótesis que, sin contradecir el principio de conservación de la energía, nos expliquen la incompatibilidad entre las fórmulas (1) y (3). Hipótesis que á su vez serán consecuencias lógicas del principio de conservación, puesto en vigor, simultáneamente, en los núms. 1 y 2 y que podrán dar lugar á otras tantas teorías de ese fenómeno.

5.—**Primera hipótesis**. Sabemos que una corriente eléctrica de intensidad I, recorriendo un hilo de resistencia R, produce en el tiempo t, una cantidad de calor expresada por

$$C = R I^2 t:$$

esto es precisamente la ley de Joule.

Ahora bien; esta ley es indudablemente cierta para cuando toda la energía disponible se emplea en calentar el circuito, es decir, cuando la corriente no trabaja; pero ¿será igualmente cierta para cuando la energía del generador ha de producir además un trabajo exterior?... ¿tendrá que sufrir entonces la ley de Joule alguna modificación?

El trabajo del vapor enfría el vaso que le contiene, ¿por qué el trabajo de la electricidad no pudiera enfriar el hilo que recorre? Creo que la duda se puede admitir, pues tan lógico me parece decir *á priori* que se produce una variación en la intensidad, lo cual supone una modificación en la ley de Ohm, como decir que pueda modificarse la ley de Joule.

Admitamos, pues, que la ley de Joule se modifica cuando se trata de una corriente que trabaja, y supongamos que, para un

tiempo t y un trabajo positivo, el calor desarrollado en el circuito sea según esto

$$C = (R I^2 - x)\, t$$

Tomemos los demás elementos como el núm. 2, y planteando el principio de conservación de la energía, tendremos, prescindiendo ya del factor t,

$$E I = R I^2 - x + G I I',$$

fórmula muy distinta á (3) y que comparándola con la (1) nos da para valor de x

$$x = G I I'.$$

Es decir, que el calor que debería desarrollarse en el hilo según la ley de Joule, viene á disminuirse en una cantidad equivalente al trabajo producido por la corriente, ó de otro modo: la energía que se gasta ahora en trabajo, se resta de la que se convierte en calor cuando la corriente no trabaja.

Si el trabajo fuese negativo, resultaría una producción de calor, en el hilo, superior á la que indica la ley de Joule.

Queda, pues, deshecha con esta hipótesis la incompatibilidad que aparecía entre las ecuaciones (1) y (3), y con ello, puesta la base para una teoría de la inducción.

6.—**Segunda hipótesis**. Dijimos en el núm. 3 que se explica la contradicción, de que entonces tratábamos, admitiendo una variación en la intensidad; acabamos de ver que también se explica suponiendo una modificación en la ley de Joule; vamos ahora á explicarla por una variación simultánea en la intensidad y en la producción del calor.

Supongamos que fuese y la variación de la intensidad y x la de la producción del calor; estableciendo, como siempre, la ecuación que expresaría la conservación de la energía, tendríamos:

$$E (I - y) = [R (I - y)^2 - x] + G (I - y) I'; \qquad (4)$$

en donde, para hallar los valores de x é y sólo podemos disponer de la ecuación escrita.

Nos vemos, pues, en el terrible dilema: de valuar esas incógnitas con el auxilio de una sola ecuación, lo cual es imposible, ó no pasar adelante en el estudio matemático de la inducción.

Y, sin embargo, con esa doble variación se explicaría ciertamente la contradicción del núm. 3, y en nada repugna al principio de conservación de la energía; todo depende de la magnitud de esas variaciones.

De aquí resulta, que bien pudiera basarse la teoría de la inducción en esta hipótesis; pero, si así es, no podemos saber hasta dónde llegan los efectos del fenómeno que buscamos, porque los instrumentos de cálculo que poseemos, impotentes en este caso, no pueden resolver la ecuación; y por tanto, siéndonos imposible conocer analíticamente las variaciones que se producen en este caso por el trabajo de la corriente, imposible será también hacer un estudio analítico de la inducción y establecer la teoría de este fenómeno. ¡Desesperante consecuencia! Pero todavía la ecuación (4) no está completa. Hasta ahora, sólo hemos considerado las alteraciones que se producen en una de las dos corrientes; pero si queremos estudiar el caso de un modo completo, hemos de considerar á las dos corrientes sufriendo variaciones simultáneas, de calor é intensidad, puesto que es imposible considerar aisladamente á una de ellas. Tendremos que aplicar entonces el principio de conservación de la energía al conjunto de las dos corrientes, y aparecerían en la ecuación, siempre única, nada menos que cuatro incógnitas.

7.—**Tercera hipótesis.** Veamos todavía una nueva hipótesis, expuesta por Bertrand en su obra sobre la teoría matemática de la electricidad que, aunque presentada allí con suma concisión, me ha parecido muy curiosa para explicar *á priori* la contradicción del número 3, pues no se necesita suponer en ella variación de intensidad en la corriente que trabaja, ni alteración en la producción de calor en el circuito. No sé si he llegado á comprender bien la idea que Bertrand indica: intentaré explanarla aquí, tal como he podido concebirla.

Supongamos que se tiene una corriente de intensidad constante: el fluído eléctrico está animado en el conductor de movimientos cuya naturaleza desconocemos, pero que se propagan al éter circunvecino, y producen una cierta atmósfera de actividad; si acercamos otro conductor por el que circula una corriente, de modo que se introduzca en la atmósfera de actividad, se verifica inmediatamente una atracción, ó una repulsión, entre ambas corrientes. Es evidente que esto significa un trabajo que se ha de realizar á expensas de la energía del generador, pues no contamos con otra fuente de energía. La hipótesis de que hablo explica estos fenómenos de la siguiente manera:

Al nacer una corriente, no se gasta toda la energía del generador en producir corriente: gran parte de ella se invierte en producir esos movimientos que ponen al éter en un cierto estado de excitación, formando lo que antes llamé atmósfera de actividad. Pero ¿llegará algún tiempo en que toda la energía se emplee en producir corriente? Nunca; y aquí está, á mi entender, precisamente, la esencia de esta hipótesis.

La intensidad de la corriente llegará á tener un valor que permanecerá constante, tendremos entonces una corriente de régimen permanente, pero en la que siempre una cierta parte de la energía del generador se invertirá en mantener la atmósfera de actividad (1).

Si consideramos, pues, como decíamos al empezar, una corriente con intensidad constante, hemos de tener presente que la energía del generador se divide en dos partes: una que produce la corriente, y da lugar al efecto calorífico de Joule; otra que se gasta en mantener la atmósfera de actividad.

Al acercarse la otra corriente, la primera no ejecuta directamente sobre ella el trabajo de atracción ó repulsión; lo hace el éter mediante la energía que recibió del generador de la primera corriente. ¿Qué hace, pues, ésta entonces? Se limita solamente á mantener la atmósfera de actividad, como siempre, sin alterarse en nada porque la otra se acerque.

De todo lo cual resulta que la corriente propuesta siempre hace lo mismo; si está sola, no vemos más que el efecto de Joule, porque la atmósfera de actividad no tiene sujeto en que manifestarse; para que podamos darnos cuenta de la energía que se queda en el éter, es necesario que, acercando otra corriente, se manifieste esa energía en sus efectos por las atracciones ó repulsiones.

Según esta hipótesis, pues, la incompatibilidad entre las ecua-

(1) No hay que olvidar que esta hipótesis, como las dos anteriores, se hacen *á priori* sin contar con la experiencia.

ciones (1) y (3) es debida tan sólo á que al plantear la fórmula (1) sólo hemos atendido al único efecto en que visiblemente se invertía la energía del generador; pero en virtud de lo dicho, hay que modificar esa fórmula introduciendo en ella el término correspondiente al trabajo de mantener la atmósfera de actividad, y quedaría entonces:

$$EI = RI^2 + \pi$$

en la que π representa el valor desconocido de ese trabajo.

En esta última ecuación queda sin determinar el valor de π, pero comparándola con la (3) se vé que estas dos fórmulas son una misma ecuación, con la sola diferencia de estar determinado claramente en la segunda el valor π. No hay, pues, contradicción alguna.

8.—**Estado de la cuestión.** Vistas las varias hipótesis aclaratorias de la contradicción del núm. 3, sin mencionar otras muchas que podrían explicar, tal vez, la referida incompatibilidad miradas *á priori*, brota esta consecuencia: si sólo nos empeñamos en que el principio de conservación de la energía nos lo diga todo, y nos lanzamos *á priori* en teorías más ó menos ingeniosas, la cuestión se presenta cada vez más complicada, y la elección entre los varios caminos que se nos presentan para llegar á conocer el nuevo fenómeno de la inducción es dudosa y delicadísima.

Podemos, pues, afirmar que la inducción, tal como hoy se conoce (como variación de intensidad), no es consecuencia necesaria del principio de conservación de la energía, sino una de tantas deducciones que se podrían sacar de este principio; por manera que si queremos guiarnos únicamente de él, encontraremos, sí, muchas explicaciones á la contradicción del núm. 3, pero llegaremos en último término á un estado tal de confusión y duda, que no nos atreveremos prudentemente á seguir adelante, sin nuevas y fijas orientaciones.

Este es, en mi concepto, el verdadero estado de la cuestión.

9.—**Verdadera teoría de la inducción.** Parecerá imposible el estudio matemático de la inducción sin duda ni recelos, supuestas las vacilaciones del párrafo anterior; pero afortunadamente para nosotros, disípanse todas las dudas sobre el camino que debemos

seguir en este estudio, ante los luminosos experimentos de Faraday y Lenz en este asunto, haciéndonos ver muy claramente que el trabajo mecánico producido por una corriente hace nacer en ella una variación de la intensidad.

Esta conclusión experimental es la que ha dado luz en la materia á los físicos matemáticos, para que, desechando todas las teorías que no se basan en la variación de la intensidad, puedan emprender el único camino que conduce al verdadero conocimiento de la inducción, haciéndola entrar de este modo bajo el dominio de las matemáticas; y lo que antes parecía un problema tan difícil y casi imposible de abordar, se presenta ahora como una cuestión concreta y fácilmente asequible.

Quedan deshechas de un golpe, por no estar conformes con la experiencia, todas las teorías que hemos establecido anteriormente, y sólo queda en pie la de la variación de la intensidad.

Con esta conclusión, y el principio de conservación de la energía, podemos explicar todos los fenómonos de inducción.

Esto es lo que vamos á hacer en la segunda parte.

De la inducción. Su fuerza electromotriz. Auto-inducción

10.—**Variación de la intensidad primitiva.** Supongamos una corriente de intensidad I, recorriendo un hilo conductor de resistencia R, con una fuerza electromotriz E.

Sabemos ya que si se acerca otra corriente, de intensidad I′, la intensidad de la primera ha de variar; ya no tendrá, pues, el valor primitivo I, sino otro nuevo valor, tal como x.

Según esto, la ecuación (3) deberá escribirse en la forma

$$Ex = Rx^2 + Gx\,I', \qquad (5)$$

fórmula que ya no es incompatible con la (1), pues todo depende del valor que deba tomar x.

Fácil es ahora despejar x en la ecuación (5), y así se tiene:

$$x = \frac{E - GI'}{R} \qquad (6)$$

ó también: $$x = \frac{E}{R} - \frac{GI'}{R}.$$

Pero si recordamos la fórmula (2) que expresa la ley de Ohm, fácilmente veremos que

$$x = I - \frac{GI'}{R};$$

es decir, que el trabajo que la corriente I ha ejercido, ha dado por efecto *disminuir* la intensidad I en el valor de la fracción $\frac{GI'}{R}$. He dicho que disminuía la intensidad, suponiendo positivo el valor del quebrado $\frac{GI'}{R}$. Veamos cuándo podrá ser negativo.

El denominador R, que expresa el valor de la resistencia del circuíto, siempre será positivo, pues no existe resistencia negativa; luego el signo del quebrado será siempre el del numerador. Este proviene del término que expresaba el trabajo en la ecuación (5) y será del mismo signo que él; resulta, pues, que el quebrado en cuestión será positivo cuando el trabajo sea positivo, y negativo cuando lo sea el trabajo.

Pero ¿cuándo será el trabajo negativo? Es este un concepto que se resiste un poco á primera vista, pero que lo admiten todos los físicos, entendiendo que una corriente ejecuta un trabajo negativo cuando atrae á otra corriente que se aleja ó repele á una corriente que aproximamos, esto es, cuando el verdadero trabajo que se produce no lo hace la corriente según sus fuerzas, sino que lo hacemos nosotros por un medio extraño á la corriente y contrario á esas fuerzas. En tal caso, puede también llegarse directamente á la expresión de la nueva intensidad. Basta para ello establecer de nuevo la fórmula (5) poniendo de manifiesto el signo que lleva ahora el trabajo; así tendremos:

$$Ex = Rx^2 - GxI' \qquad (5')$$

de donde $$x = \frac{E + GI'}{R} \qquad (6')$$

ó bien $$x = I + \frac{GI'}{R}.$$

Pueden resumirse los conceptos emitidos en este número, diciendo: la inducción produce, en la corriente que trabaja, una disminución de intensidad si el trabajo es positivo, ó un aumento si el trabajo es negativo; pero tanto en un caso como en otro, la variación que sufre la intensidad primitiva está medida por el valor de la fracción $\frac{GI'}{R}$.

11.—**Fuerza electromotriz de inducción.** Si nos fijamos en las fórmulas (6), (6') veremos que el nuevo valor x de la intensidad está expresado por fórmulas análogas á la que expresa la ley de Ohm, con la sola diferencia de aparecer la fuerza electromotriz E disminuída ó aumentada en GI', según el caso.

Puede interpretarse esta particularidad diciendo que el valor GI' es una cierta fuerza electromotriz que, apareciendo en el circuíto inducido, se suma á la fuerza electromotriz de la pila, y que consideraremos como negativa ó positiva, según el trabajo sea positivo ó negativo. Según esto, si ponemos

$$e = \pm GI',$$

podemos expresar con más generalidad el nuevo valor que toma la intensidad de la corriente inducida, escribiendo:

$$x = \frac{E + e}{R} \qquad (7)$$

este valor e es lo que llamo fuerza electromotriz de inducción.

En virtud de la fórmula (7) se podría dar á la ley de Ohm un enunciado más general, diciendo: la intensidad de una corriente está medida por el cociente de dividir la suma de las fuerzas electromotrices que hay en el circuíto, por la resistencia del mismo.

Corolario (Ley de Neumann). Recordando que el trabajo entre dos corrientes, para la unidad de tiempo, lo expresé en el núm 2 por el producto del coeficiente G por las intensidades de cada una de las corrientes, fácilmente se comprende que la fuerza electromotriz de inducción GI', no es más que el trabajo producido sobre

la corriente I′, para la unidad de tiempo, por otra corriente cuya intensidad fuese igual á uno.

Esto es precisamente lo que enuncia Mascart como teorema de Neumann, donde dice: «La fuerza electromotriz de inducción es igual al trabajo que sería realizado, en la unidad de tiempo, por el sistema magnético, si la intensidad de la corriente en el circuíto inducido fuese igual á la unidad».

12.—**Corriente de inducción**. La fuerza electromotriz de inducción, expresada por G I′, será una cantidad independiente del valor de la intensidad primitiva I de la corriente inducida, pues para nada entra este valor en esa expresión; de aquí se deduce inmediatamente que dicha fuerza electromotriz debe producirse, y su valor será el mismo, para cualquier valor de I, y por tanto, también lo será cuando la corriente primitiva sea nula en el circuíto inducido.

Podemos, pues, afirmar lógicamente, que si á un conductor por el que no circula corriente alguna, aproximamos ó alejamos una corriente, se producirá en dicho conductor una fuerza electromotriz de inducción de igual valor á la que se producía en los casos estudiados en el número anterior, con tal que todas las demás circunstancias, que no sean la intensidad I, se conserven en el mismo estado.

Esta fuerza electromotriz producirá en el repetido conductor una corriente, cuya intensidad será igual á la variación que sufría en los casos del núm. 10 la intensidad primitiva de la corriente inducida.

Tratemos de deducir analíticamente lo que acabo de decir. Ante todo debemos considerar que el trabajo que aquí se produzca, bien sea aproximando ó bien alejando una corriente al circuíto en cuestión, ha de ser precisamente negativo, pues el circuíto que no tiene corriente, ningún trabajo puede producir por sí. Luego la fórmula de que hemos de partir será la (5′) en que se toma el trabajo negativo, que es:

$$E x = R x^2 - G x I'.$$

Suponiendo en el mismo estado todas las demás circunstancias,

anulemos la intensidad primitiva del circuíto inducido, para colocarnos lógicamente en el caso de que se trata.

Tendremos:

$$I = o; \qquad (8)$$

y en virtud de la ley de Ohm, puesto que la resistencia R no es infinita, lo cual siempre podemos suponer, será también $E = o$; aplicando esto á la fórmula (5′), tenemos:

$$o = R x^2 - G x I';$$

y si llamamos i al valor particular que resulta de esta fórmula para x:

$$i = \frac{G I'}{R} = \frac{e}{R}. \qquad (9)$$

Donde se ve confirmado claramente lo que antes dije respecto á los valores que debían tomar, en este caso, la fuerza electromotriz de inducción y la corriente á que ella da lugar.

Este valor i es la intensidad de la que llamo *corriente de inducción*, por ser debida exclusivamente al efecto de inducción, distinguiéndola así de la *corriente inducida*, que es la que se somete á la inducción y es modificada por ella.

13.—**Sentido de la corriente de inducción**. Conocida y definida la corriente de inducción, se ocurre averiguar cuál sea el sentido de esta corriente respecto al que tiene la que acercamos ó alejamos.

Para averiguarlo, basta tener presente la condición que hemos impuesto, de ser negativo el trabajo producido.

En efecto: empecemos por recordar que, según dijimos en el número 10, el trabajo de una corriente es negativo cuando atrae á otra que se aleja, ó repele á la que se aproxima. Supongamos ahora, por un momento, que en el circuíto sometido á la inducción hubiese corriente preexistente; en tal caso, y siempre sobre la base de trabajo negativo, la corriente preexistente debiera ser del mismo sentido que la que alejamos, ó de sentido contrario á la que aproximamos.

Pero cuando el trabajo es negativo, sabemos por el mismo número 10, que la corriente de inducción (equivalente á la variación que sufre la intensidad cuando hay corriente primitiva en el cir-

cuíto inducido), es del mismo sentido que la preexistente, puesto que la aumenta; luego la corriente de inducción será de sentido contrario á la que se aproxima, ó del mismo sentido de la que se aleja.

O bien, resumiendo en forma de ley:

Una corriente que se aproxima á un circuíto, produce en él una corriente de inducción, de sentido contrario.

Una corriente que se aleja de un circuíto, produce una corriente de inducción del mismo sentido.

NOTA. Los resultados obtenidos en estos últimos números, desde el 10, serían los mismos, si en lugar de suponer fijo el circuíto inducido y móvil al inductor, hubiésemos supuesto lo contrario, como lo hace, por ejemplo, el Sr. Rojas en su obra de electricidad.

14.—**Introducción del flujo de fuerza** (1). Tomemos la fórmula (5), pero restituyendo en ella el factor de tiempo que allí habíamos suprimido, y será para el tiempo dt,

$$E x d t = R x^2 d t + G x I' d t. \qquad (10)$$

Sabemos que el último término de esta fórmula expresa el trabajo realizado por las fuerzas electromagnéticas en el sistema de las corrientes durante el tiempo dt.

Por otra parte, expresan los físicos este trabajo, en función del flujo, por la fórmula

$$d T = x d \varphi \qquad (11)$$

en que $d\varphi$ representa la variación del flujo que atraviesa el circuíto inducido, en el tiempo dt.

Aceptando, pues, esta fórmula de universal aprobación, y poniendo el valor (11) del trabajo en la fórmula (10), tendremos:

$$E x d t = R x^2 d t + x d \varphi$$

de donde se saca fácilmente

$$E - \frac{d\varphi}{dt} = R x,$$

(1) Doy por completamente conocido el flujo de fuerza por no hacer difuso y excesivamente extenso mi trabajo, estudiando ahora ese elemento.

BIBLIOTECA DE LA FACULTAD DE MEDICINA MADRID

ó bien

$$x = \frac{E - \frac{d\varphi}{dt}}{R} \qquad (12)$$

que nos da otra expresión del nuevo valor que toma la intensidad de la corriente inducida, por efecto de la inducción, en función del flujo de fuerza que atraviesa el circuíto inducido.

15.—**Fórmula más general de la fuerza electromotriz de inducción.** Comparando la fórmula (12) con la (7) y suponiendo igualdad de circunstancias para poder comparar, nos resultará:

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} \qquad (13)$$

Fórmula que traducida al lenguaje vulgar nos dice: que la fuerza electromotriz de inducción se mide por la derivada, con relación al tiempo, del flujo de fuerza que atraviesa el circuíto, tomada con signo contrario; en cuya fórmula debe tomarse $d\varphi$ con el signo que le corresponda, de suerte que el del quebrado $\frac{d\varphi}{dt}$ y por tanto, el de la fuerza electromotriz, cambiará con el sentido de la variación del flujo, que puede ser de aumento ó disminución.

La fórmula (13), acabada de hallar, es la más general y de trascendental importancia; en ella vemos que la fuerza electromotriz de inducción se nos presenta dependiendo exclusivamente del flujo de fuerza que atraviesa el circuíto, ó por mejor decir, de la variación que experimenta ese flujo con relación al tiempo; podremos, pues, decir, como deducción inmediata de lo que antecede, que en todo circuíto cerrado, de cualquier forma que sea, se producirá una corriente de inducción de más ó menos intensidad, siempre que hagamos variar el flujo de fuerza que atraviesa el circuíto.

16.—**Consecuencias del anterior.** Por la fórmula (13) se vé claramente comprobado lo que ya indiqué en otro lugar, á saber: que será indiferente para estudiar los efectos de la inducción, considerar que la corriente inductora se mueva permaneciendo fijo el circuíto inducido, ó que sea éste quien varíe de posición permaneciendo inmóvil la corriente inductora; lo esencial es que varíe la posición relativa de las líneas de fuerza del campo magnético

inductor respecto al circuíto inducido, para que varíe así el flujo que pasa por dentro de éste.

Pero aún hay más; la corriente de inducción (ó la variación de la corriente inducida), se producirá asimismo, variando la intensidad de la corriente inductora ó la forma del circuíto inducido, pues de todas estas maneras se puede hacer variar el flujo.

Todo esto nos descubre nuevos horizontes y nos facilita el estudio de todos los casos de inducción, pues bastará ocuparnos desde ahora en averiguar la variación del flujo, en vez de tener que buscar el trabajo, lo cual nos hubiese creado muchas dificultades, especialmente en el estudio de algunos casos.

17.—**Valor de la intensidad de la corriente de inducción en función del flujo.** Expresada la fuerza electromotriz en función del flujo de fuerza, procede ahora poner en función de este mismo elemento la intensidad de la corriente de inducción.

Para ello, modificaremos convenientemente la fórmula (9) establecida en el núm. 12. Decíamos allí:

$$i = \frac{e}{R};$$

pero según hemos visto en el núm. 15, sabemos que la fuerza electromotriz de inducción se expresa por

$$e = -\frac{d\varphi}{dt};$$

luego poniendo el valor de e en la fórmula que da el valor i, se tiene:

$$i = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt} \qquad (9')$$

en la cual hay que tomar la variación $d\varphi$ del flujo con el signo que corresponda.

Esta última expresión nos da el valor de la intensidad de la corriente de inducción en función del flujo de fuerza que atraviesa el circuíto inducido.

18.—**Corriente de auto-inducción.** Voy á tratar en este número de un nuevo fenómeno, de quien nada he dicho hasta ahora, y que sin embargo, es un modo de inducción muy importante, tanto si se

mira en sí mismo, como en sus relaciones con la averiguación de la fuerza electromotriz de inducción.

Conócese en el mundo físico con el nombre de *auto-inducción;* y he dicho ser muy importante para hallar la fuerza electromotriz de inducción, porque sin él no sería posible conocer el verdadero alcance de la variación del flujo, y por tanto, el verdadero valor de aquella fuerza.

Como por el nombre se manifiesta, este fenómeno no es más que la inducción producida por una corriente sobre su propio circuíto. No negaré que la idea es algo nueva á primera vista, y se aparta bastante del modo como hasta aquí hemos visto la inducción, pero es idea muy natural y lógica si se tiene presente el concepto más general de la fuerza electromotriz de inducción.

En efecto: toda corriente eléctrica, cualquiera que sea el circuíto que recorre, produce alrededor del conductor un verdadero campo magnético, cuyas líneas de fuerza parten del interior del circuíto por la cara norte ó positiva de la corriente, y pasando por el exterior, vuelven al circuíto por la cara sur ó negativa.

Este campo magnético, que es un hecho plenamente conforme con la equivalencia admitida por los físicos entre corrientes eléctricas y hojas magnéticas, lo llamaré para mayor claridad *campo propio* de la corriente, siguiendo respetables autores.

Es evidente que el campo propio, con sus líneas de fuerza peculiares, producirá sobre el circuíto un flujo de fuerza, que entrando por la cara negativa, saldrá por la positiva, según lo que antes dije de las líneas de fuerza. Podremos, por tanto, afirmar, que siempre que tengamos un circuíto recorrido por una corriente habrá que considerarle atravesado por un cierto flujo que pudiera llegar á él procedente de un sistema magnético ajeno á la corriente misma. A este flujo de la corriente sobre su propio circuíto le llamaré *flujo propio* de la corriente, por analogía con el campo propio, del cual proviene.

Más adelante, al definir el coeficiente de auto-inducción, veremos cuánto vale el flujo propio y de qué depende su valor; pero, entretanto, nos basta ahora saber que ese flujo puede variar; y como la variación del flujo que llega al circuíto, cualquiera que ella sea, es la única condición necesaria para que exista fuerza electromotriz de

inducción; resulta indudable que puede una corriente producir en su circuíto una fuerza electromotriz de inducción, y por consiguiente, una corriente del mismo nombre.

Esta corriente de inducción, en este caso de ser debida al flujo propio, suele llamarse de *auto-inducción*.

Respecto á los valores de esa fuerza electromotriz y de esa corriente de auto-inducción, no digo nada ahora porque las estudio al final de mi trabajo como casos particulares.

19.—**Coeficiente de inducción mutua de dos circuítos.** Necesitando aplicar después los coeficientes de inducción, y con el fin de dejar reunidas todas las fórmulas que he de aplicar, terminaré esta segunda parte definiendo dichos coeficientes, para poder luego entrar directamente en las aplicaciónes sin necesidad de más preparación.

Empezando, pues, por el de inducción mutua, recordemos ante todo que la energía de un circuíto por el que circula una corriente de intensidad I, en un campo magnético, se llega á encontrar directamente, partiendo de la definición del potencial por el trabajo, y está expresada por:

$$W = -I N; \qquad (14)$$

en donde N es el flujo del campo que llega al circuíto, y se considerará como positivo ó negativo, según entre por la cara negativa ó positiva.

Supongamos ahora dos circuítos de intensidades I é I′; sea N el flujo del circuíto I que llega al I′ entrado por la cara negativa, y sea N′ el flujo que entre por la cara negativa de I partiendo de I′.

Considerando á cada uno de estos circuítos en el campo magnético del otro, llamando W_1 y W_2, respectivamente, la energía de I é I′, y aplicando sucesivamente la fórmula (14), tendremos:

$$W_1 = -I N', \qquad W_2 = -I' N.$$

Pero los dos valores hallados deben ser iguales por expresar ambos la energía del sistema; luego tendremos la igualdad:

$$I N' = I' N$$

de donde se deduce:

$$\frac{N'}{I'} = \frac{N}{I}$$

y si llamamos M al valor común de estas dos razones, podemos escribir:

$$\frac{N'}{I'} = M, \qquad \frac{N}{I} = M. \qquad (15)$$

Este número M se llama *coeficiente de inducción mutua* de dos circuítos.

Si hacemos, respectivamente, en las fórmulas (15)

$$I' = 1, \qquad I = 1$$

quedará

$$N' = M, \qquad N = M.$$

Lo cual nos dice que el coeficiente de inducción mutua de dos circuítos es el flujo que mandaría uno de ellos sobre otro, si el primero tuviese una corriente de intensidad igual á uno.

20.—**Coeficiente de auto-inducción.** El flujo propio de una corriente, definido hace poco, puede representarse, siendo I la intensidad, por la fórmula $N = L I$, cuando la permeabilidad magnética del medio en que está la corriente y la forma del circuíto sean constantes.

En efecto: la permeabilidad magnética de una substancia es la mayor ó menor facilidad que ofrece á dejarse atravesar por el flujo; permeabilidad magnética constante significa, pues, tanto como dejar pasar siempre el mismo flujo por igual superficie de sección, para igual intensidad de campo. Luego no variando la forma del circuíto, lo cual supone la misma superficie, y siendo constante la permeabilidad del medio, podemos decir que el flujo propio es proporcional á la intensidad de la corriente, y tendremos la fórmula antes escrita, en la cual L representará una constante.

Resulta de aquí que el valor de L variará, en general, de un circuíto á otro, y será constante para cada circuíto si la permeabilidad del medio no varía.

Este coeficiente, cuyo valor será

$$L = \frac{N}{I}$$

se llama *coeficiente de auto-inducción* de un circuíto, ó también *coeficiente de inducción propia*.

Si en la última fórmula se hace $I = 1$, resulta

$$L = N;$$

es decir, el coeficiente de auto-inducción de un circuíto es el flujo propio del mismo circuíto, y en las mismas condiciones de forma y medio, cuando la intensidad es igual á la unidad.

Consecuencias y aplicaciones

21.—**Leyes de las corrientes de inducción.** Se ha encontrado para las corrientes de inducción gran variedad y número de leyes físicas, definidas y comprobadas en su mayor parte por procedimientos experimentales; pero pueden estas leyes deducirse directamente de las fórmulas anteriormente establecidas, ofreciéndonos así un testimonio de la importancia de esas fórmulas y una comprobación manifiesta de la legitimidad de la teoría aceptada.

Esto veremos en los números siguientes, con algunas de esas leyes, y aunque, en general, me refiero á corrientes de inducción, debe entenderse que lo mismo se aplican á las variaciones que sufre la intensidad de la corriente inducida, pues sabemos son esencialmente la misma cosa.

22.—**La condición necesaria para conservarse constantemente una corriente inducida en el nuevo valor que toma su intensidad por efecto de la inducción, es que el flujo varíe proporcionalmente al tiempo.** Recordemos la conocida fórmula (12):

$$x = \frac{E - \frac{d\varphi}{dt}}{R}.$$

Si el flujo varía proporcionalmente al tiempo, como dice el enunciado, la relación $\frac{d\varphi}{dt}$ entre la variación del flujo y la del tiempo será indudablemente una cantidad constante, de donde también lo será el valor x, no variando la resistencia del circuíto ni la fuerza electromotriz que da el generador.

23.—**Comprobación de la ley de Neumann.** El trabajo de un sistema magnético formado por un campo inductor (de una corriente, por ejemplo) y una corriente inducida, estaba expresado, según la fórmula (11) del núm. 14, por

$$dT = I\,d\varphi,$$

siendo I la intensidad de la corriente inducida, y $d\varphi$ la variación del flujo que llegaba á ella en el tiempo dt.

Si llamamos T_1 al valor de este trabajo para unidad de tiempo y de intensidad de la corriente inducida, tenemos:

$$T_1 = \frac{1}{I}\frac{dT}{dt}$$

ó bien:

$$T_1 = \frac{d\varphi}{dt},$$

que es, según sabemos (núm. 15), el valor de la fuerza electromotriz de inducción. Luego la fuerza electromotriz de inducción es igual al trabajo realizado, en la unidad de tiempo, por el sistema magnético, si la intensidad de la corriente en el circuíto inducido es igual á la unidad. Lo cual es precisamente la citada ley de Neumann.

24.—**Sea cual fuere la manera de hacer variar el flujo, dos variaciones iguales y contrarias producirán corrientes de inducción de la misma intensidad y sentido contrario.** Esto debe entenderse en igualdad de las demás circunstancias.

Con la misma variación absoluta del flujo pueden ocurrir dos casos:

1.° Que el flujo varíe de φ á $\varphi + d\varphi$.

2.° Que varíe de φ á $\varphi - d\varphi$.

En el primero, el incremento del flujo, en valor y signo, es $d\varphi$; en el segundo, es $-d\varphi$.

Ahora bien: este cambio de signo en el incremento del flujo, ha de trascender, precisamente, á la expresión de la fuerza electromotriz de inducción, que es como sabemos,

$$e = -\frac{d\varphi}{dt},$$

la cual tomará en estos casos, con signo explícito, los valores:

$$e_1 = -\frac{d\varphi}{dt}, \qquad e_2 = \frac{d\varphi}{dt};$$

de donde:

$$e_1 = -e_2.$$

Resultan, pues, fuerzas electromotrices de signo contrario; pero un cambio de signo en la fuerza electromotriz significa, indudablemente, un cambio de sentido en la caída de potenciales. Se producirán, por consiguiente, en los casos dichos, corrientes de inducción debidas á la misma diferencia de potencial, pero de sentido contrario; es decir, corrientes de inducción de igual intensidad y sentido contrario.

No figurando para nada en este razonamiento, ni en las fórmulas aducidas, el procedimiento empleado para producir la variación del flujo, es evidente que lo que acabo de decir será independiente de la manera como ese flujo haya variado, quedando así comprobada la proposición.

25.—**La corriente de inducción tiende á oponerse al movimiento del sistema magnético.** Para demostrar esta proposición, conocida por ley de Lenz, me permitiré considerar separadamente, en el circuíto inducido, la intensidad primitiva de la corriente inducida I, debida exclusivamente al generador, y la intensidad de la corriente de inducción i, debida á este fenómeno solamente; más claro: considero independientemente en el circuíto inducido las dos corrientes cuya suma produce la intensidad resultante de la corriente inducida.

Ya sabemos que el trabajo electromagnético que realiza la corriente inducida sobre el sistema magnético inductor, está dado por la fórmula:

$$d\,T_I = I\,d\varphi;$$

pero la coriente de inducción, en cuanto nazca, también producirá sobre el sistema inductor un cierto trabajo, que estará expresado por

$$d\,T_i = i\,d\varphi.$$

Debemos notar, en primer lugar, que el factor $d\varphi$ es el mismo en las dos fórmulas; y así debe ser, pues se trata del mismo

campo inductor y del mismo circuíto inducido, y la variación del flujo que llega al circuíto es la misma.

Supongamos, además, que la corriente inducida circula siempre en el mismo sentido, considerando á la de inducción como positiva cuando circula en el sentido de la inducida, y como negativa en caso contrario.

Sabido esto, estudiemos, sucesivamente, los dos únicos casos que pueden ocurrir en la variación del flujo:

a) Que la variación del flujo sea creciente $d\varphi > o$.

En este caso, el producto $I \cdot d\varphi$ es positivo, pues I es siempre positivo, y $d\varphi$ lo es también ahora. Por otra parte, recordando la fórmula

$$i = -\frac{I}{R}\frac{d\varphi}{dt},$$

resulta que la intensidad i es negativa en este caso por ser positivo $d\varphi$ y serlo también, necesariamente, R y dt.

Luego tenemos:

$$d\,T_I > o \qquad d\,T_i < o;$$

lo cual nos dice que la corriente I produce, en el sistema magnético, un movimiento en el sentido de las fuerzas electromagnéticas, mientras la corriente i produce un trabajo de sentido contrario, y por tanto, un movimiento opuesto al anterior.

b) Que el flujo varíe en disminución $d\varphi < o$.

En este caso tendremos, razonando como antes,

$$I > o, \qquad i > o;$$

y por consiguiente:

$$d\,T_I < o, \qquad d\,T_i < o.$$

El movimiento del sistema magnético está producido ahora por una causa exterior, según vimos al definir el trabajo negativo, en sentido opuesto al de las acciones electromagnéticas; y la corriente i une su esfuerzo al de I para aumentar así el efecto de la acción electromagnética y oponerse á aquella fuerza extraña productora del movimiento del sistrema.

Se ve, pues, claramente que siempre el efecto de la corriente de inducción es oponerse al movimiento del sistema.

26.—**La cantidad de electricidad puesta en movimiento por la corriente de inducción es igual al cociente que resulta de dividir la variación del flujo de fuerza por la resistencia del circuíto inducido.**

La cantidad de electricidad transportada por una corriente de intensidad i, en el tiempo $d\,t$, está expresada, según la definición de intensidad, por:

$$d\,Q = i \cdot d\,t,$$

pero sabemos que

$$i = -\frac{1}{R}\frac{d\,\varphi}{d\,t};$$

luego sustituyendo será

$$d\,Q = -\frac{1}{R}\frac{d\,\varphi}{d\,t}\,d\,t = -\frac{1}{R}\,d\,\varphi;$$

y suponiendo que el flujo pasa del valor φ_1 á φ_2, integrando entre estos límites, tendremos:

$$Q = -\frac{1}{R}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\,\varphi = \frac{1}{R}\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\,\varphi = \frac{1}{R}(\varphi_1 - \varphi_2).$$

La cantidad de electricidad será, pues,

$$Q = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R};$$

que es lo que queríamos demostrar.

Corolario 1.° Fácilmente se deduce de esta fórmula, con sólo observar que en ella no aparece el tiempo, que el valor Q es independiente de la duración de la variación del flujo; por manera que si suponemos un circuíto determinado, para que la resistencia no varíe, podremos decir: La cantidad de electricidad puesta en circulación por la corriente de inducción, sólo depende de la magnitud de la variación del flujo, y es independiente de su duración, y por tanto, de la velocidad con que se realice.

Corolario 2.° El ser positiva ó negativa la diferencia $\varphi_1 - \varphi_2$ de la última fórmula, no alterará en nada la cantidad absoluta de electricidad que hace circular la corriente de inducción; todo se reducirá á ir la corriente en uno ú otro sentido, pero la cantidad de electricidad no varía. Podremos decir, según esto, que: Dos corrientes de inducción, producidas por variaciones de flujo iguales y contrarias, transportan cantidades iguales de electricidad.

27.—**La duración de la corriente de inducción será la misma que la de la variación del flujo.**

Si la variación del flujo es nula, no puede haber corriente de inducción, porque también entonces se anula la fuerza electromotriz del mismo nombre; basta recordar para esto la expresión general de la fuerza electromotriz de inducción. Pero, por otra parte, según vimos en la conclusión del núm. 15, es suficiente una variación del flujo que llega á un circuíto, para producirse en él una corriente de inducción.

Luego precisamente la corriente de inducción comenzará cuando varíe el flujo, y dejará de existir cuando cese la variación, es decir, su duración será la de la variación del flujo.

Corolario. De la simple comparación de esta proposición con el corolario 1.° del número anterior, resulta inmediatamente la siguiente propiedad: la cantidad de electricidad puesta en movimiento por la corriente de inducción, es independiente de la duración de la corriente misma.

28.—**La fuerza electromotriz de inducción mide en cada momento la velocidad de variación del flujo.** Consideremos que el flujo de fuerza que llega al circuíto inducido varía por elementos $\triangle\varphi$, correspondientes á elementos de tiempo $\triangle t$. Si dividimos un elemento cualquiera $\triangle\varphi$ por el tiempo correspondiente $\triangle t$, la razón $\frac{\triangle\varphi}{\triangle t}$ nos dará el valor de la variación media del flujo en el tiempo $\triangle t$; es decir, tendremos expresada de este modo la velocidad media de variación en ese tiempo

Supongamos ahora que esos incrementos finitos $\triangle\varphi$ y $\triangle t$, disminuyen incesantemente, hasta hacerse indefinidamente pequeños, y tendremos entonces:

$$\lim.\ \frac{\triangle\varphi}{\triangle t} = \frac{d\,\varphi}{d\,t};$$

lo cual nos dará así el valor de la velocidad de variación del flujo en el tiempo $d\,t$.

Pero la razón $\frac{d\varphi}{dt}$ expresa precisamente, según sabemos, la fuerza electromotriz de inducción, en valor absoluto; luego podremos decir, con toda verdad, que la fuerza electromotriz de inducción mide en cada momento la velocidad de la variación del flujo de fuerza que llega al circuíto inducido.

Corolario. En el caso particular de que la variación del flujo fuese uniforme, es decir, cuando el flujo varíe proporcionalmente al tiempo, la velocidad de variación será una cantidad constante, lo mismo que la fuerza electromotriz; y si designamos por v esa velocidad, tendremos:

$$e = v = \frac{V}{t},$$

siendo V la variación total que sufre el flujo durante el tiempo t. Lo cual nos dice que la fuerza electromotriz de inducción, cuando la variación es uniforme, y para una cierta variación total de flujo, es inversamente proporcional al tiempo en que ésta se realiza.

Recordando ahora que la intensidad de la corriente de inducción puede expresarse, como toda intensidad, por la forma

$$i = \frac{e}{R},$$

siendo aquí e la fuerza electromotriz de inducción, y R la resistencia del circuíto en que se produce; resulta, bajo el supuesto de que la resistencia no varíe, que la intensidad variará como la fuerza electromotriz.

Luego también podemos decir que la intensidad de la corriente de inducción es inversamente proporcional al tiempo de variación, siendo fija la variación total y variando el flujo uniformemente.

Apéndice

Flujo total que llega al circuíto inducido. Sabemos que todo circuíto sometido á la acción de un campo magnético es atravesado por un cierto flujo de fuerza debido á ese campo.

Pero hemos averiguado, por otra parte, en el núm. 18, que una corriente eléctrica envía sobre el propio circuíto un flujo, llamado propio, independientemente de cualquier otro que llega al circuíto.

Si suponemos, pues, un circuíto con corriente sometido á la acción de un campo magnético, en el flujo total que le atraviese, deberemos considerar dos partes: una, procedente del campo magnético exterior, llamada flujo extraño; otra, debida á la corriente del circuíto, conocida por flujo propio. De aquí resulta poder expresar, en general, el flujo total que llega al circuíto inducido, bajo la forma siguiente:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2;$$

siendo φ_1 el flujo extraño y φ_2 el propio.

La variación de ese flujo total, en el tiempo dt, vendrá expresada por

$$d\varphi = \frac{d(\varphi_1 + \varphi_2)}{dt}\, dt = \frac{d\varphi_1 + d\varphi_2}{dt}\, dt.$$

Podrá ocurrir que uno de los flujos φ_1 ó φ_2 sea constante, pero entonces se tratará de casos particularísimos.

Recordando que la expresión de la fuerza electromotriz es, según vimos en el núm. 15,

$$e = -\frac{d\varphi}{dt},$$

resulta para esa fuerza, por lo que acabamos de ver, la siguiente expresión más completa:

$$e = -\frac{d\varphi_1 + d\varphi_2}{dt}.$$

Tomemos ahora la fórmula (12) del núm. 14, que dice:

$$I = \frac{E - \frac{d\varphi}{dt}}{R};$$

y aplicando á ella, del mismo modo, el valor explícito del flujo total se tiene:

$$I = \frac{E - \frac{d\varphi_1 + d\varphi_2}{dt}}{R}. \qquad (I)$$

La cual nos da la expresión del valor que toma la intensidad de la corriente inducida, en función de los flujos propio y extraño.

Energía potencial ó intrínseca de una corriente. Por la definición que vimos del coeficiente de auto-inducción, podremos decir que el flujo propio de una corriente, con intensidad I, estará expresado por:

$$\varphi_2 = L \cdot I;$$

y si se cumplen las condiciones indicadas para la constancia del valor L, será:

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = L\frac{dI}{dt};$$

fórmula que expresa, en este caso, el valor de la fuerza electromotriz de auto-inducción.

Se llama, pues, energía potencial ó intrínseca de una corriente, al trabajo eléctrico de esta fuerza electromotriz; es decir, al producto de ella por la cantidad de electricidad transportada en el tiempo dt.

Expresando esa cantidad de electricidad por el conocido producto $I \cdot dt$, se tiene:

$$d\varepsilon = L \cdot I \frac{dI}{dt} dt;$$

que nos da la diferencial de la energía transformada en potencial, durante el tiempo dt.

Integrando, entre los límites o y ε para el primer miembro y o é I, para el segundo, correspondientes al principio de la corriente y al tiempo en que alcanza la intensidad el valor que le asigna la ley de Ohm, tenemos:

$$\varepsilon = \int_o^I L \cdot I \cdot dI,$$

ó bien

$$\varepsilon = \frac{1}{2} L I^2$$

Tal es el valor finito de la llamada energía intrínseca de una corriente.

Energía mutua de dos corrientes. Para llegar á conocer la expresión de la energía mutua de dos corrientes, basta recordar algo de lo que se dijo en el núm. 19.

Dijimos allá que la energía del sistema de dos corrientes estaba expresada por

$$W_1 = -I \cdot N' \text{ ó } W_2 = -I' \cdot N;$$

tomemos una cualquiera de estas fórmulas, la primera, por ejemplo, y sustituyamos en ella el valor N′ sacado de la fórmula $\frac{N'}{I'} = M$; obtendremos para la energía mutua de los circuítos la siguiente expresión:

$$W = -II'M.$$

Variación de la energía intrínseca de un sistema de dos corrientes. La fórmula (I) antes hallada, nos va á servir para llegar al conocimiento de la variación sufrida por la energía intrínseca de un sistema de dos corrientes.

Ante todo, supongamos que el campo productor del flujo extraño sea debido á una corriente de intensidad I′ en un circuíto de resistencia R′ con fuerza electromotriz E′.

Esto supuesto, démosle á la (I) la forma siguiente:

$$(E - IR)\, dt = d\varphi_1 + d\varphi_2. \qquad (II)$$

Pero tratándose de dos corrientes, de las cuales cada una sufrirá la acción de la otra, encontraríamos para la I′ una fórmula análoga á la anterior. Luego, designado por $d\varphi_1'$ y $d\varphi_2'$ las variaciones de los flujos extraño y propio en el circuito I′, tendremos también:

$$(E' - R'I')\, dt = d\varphi_1' + d\varphi_2'. \qquad (III)$$

Reunamos ahora estas dos fórmulas en una sola, sumándolas

miembro á miembro, después de haber multiplicado la (II) por I, y la (III) por I'; nos resultará:

$$(E I - R I^2)\, d t + (E' I' - R' I'^2)\, d t = I\,(d\varphi_1 + d\varphi_2) + \\ + I'\,(d\varphi_1' + d\varphi_2'). \qquad \text{(IV)}$$

El primer miembro de esta fórmula representa evidentemente la energía disponible en los circuítos, es decir, la energía total producida por los generadores en el tiempo $d t$, menos la que aparece en forma de calor en los circuítos. Veamos qué es el segundo miembro.

Los valores de φ_1, φ_2, φ_1' y φ_2' serán, según las definiciones dadas para los coeficientes de inducción,

$$\varphi_1 = M I', \quad \varphi_2 = L I, \quad \varphi_1' = M I, \quad \varphi_2' = L' I';$$

diferenciándolos para el caso más general, sin suponer ninguna constante, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} d\varphi_1 &= M \cdot d I' + I' \cdot d M \\ d\varphi_2 &= L \cdot d I + I \cdot d L \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} d\varphi_1' &= M \cdot d I + I \cdot d M \\ d\varphi_2' &= L' d I' + I' \cdot d L' \end{aligned}\right\}$$

Según estos valores, la expresión (IV) se transforma en la siguiente:

$$(E I - R I^2)\, d t + (E' I' - R' I'^2)\, d t = \\ = I M\, d I' + I I'\, d M + I L\, d I + I^2\, d L + I' M\, d I + I I'\, d M + \\ + I' L'\, d I' + I'^2\, d L'.$$

Puede simplificarse el segundo miembro valiéndose de las igualdades siguientes:

$$I M\, d I' + I I'\, d M + I' M\, d I = d\,(I I' M)$$

$$I L\, d I + I^2\, d L = \frac{1}{2}\, d\,(L I^2) + \frac{1}{2} I^2\, d L$$

$$I' L'\, d I' + I'^2\, d L' = \frac{1}{2}\, d\,(L' I'^2) + \frac{1}{2} I'^2\, d L'$$

con las cuales la transformada toma esta forma:

$$(E I - R I^2 + E' I' - R' I'^2)\, d t = d\left(I I' M + \frac{L I^2}{2} + \frac{L' I'^2}{2}\right) + \\ + \frac{1}{2} I^2\, d L + \frac{1}{2} I'^2\, d L' + I I'\, d M. \qquad \text{(V)}$$

Ya sabemos lo que significa el primer miembro; el segundo nos dice la distribución de esa energía disponible en la siguiente forma: el término que lleva paréntesis expresa la parte invertida en variar la energía propia del sistema; está formado por tres términos, correspondientes, respectivamente, á la energía mutua, á la intrínseca de la I y á la intrínseca de la I'; los dos términos que siguen se refieren á la variación de forma de los circuítos; y el último, finalmente, corresponde al trabajo electrodinámico.

Aquí se ve planteado de un modo completo el principio de la conservación de la energía. Deduzcamos ahora de la última expresión general algunos casos particulares.

Supongamos cumplidas, en primer lugar, las condiciones necesarias para la constancia de los coeficientes de auto-inducción; pondremos entonces:

$$d L = o \text{ y } d L' = o,$$

y quedará:

$$(E I - R I^2 + E' I' - R' I'^2)\, d t = \\ = d\left(I I' M + \frac{L I^2}{2} + \frac{L' I'^2}{2}\right) + I I'\, d M;$$

lo cual nos dice que toda la energía disponible en los circuítos se invierte en hacer variar la energía propia del sistema y en producir el trabajo electrodinámico, como no podía menos de ser. Otro caso sería el de suponer de tal suerte el movimiento del sistema, que permaneciesen constantes las intensidades, aparte de serlo también los coeficientes de auto-inducción, y tendríamos en este caso

$$(E I - R I^2 + E_1 I_1 - R_1 I_1^2)\, d t = 2\, I I_1\, d M;$$

es decir, la energía disponible en los circuítos resulta doble de la invertida en el trabajo electrodinámico; ó lo que es igual: la mitad de esa energía disponible se empleará en trabajo, y la otra mitad en variar la energía propia del sistema.

Finalmente, el último caso que quiero proponer será el de suponer un solo circuito, cuyo coeficiente de auto-inducción sea constante; esto equivale á poner en la fórmula general los siguientes valores:

$$d L = o, \; I_1 = o, \; R_1 = o, \; E' = o, \; M = o.$$

Entonces queda reducida la fórmula á su mínima expresión:

$$(E\,I - R\,I^2)\,d\,t = d\left(\frac{L\,I^2}{2}\right);$$

en la cual, como claramente se ve, toda la energía disponible se invierte en variar la intrínseca de la corriente. Esta fórmula todavía se simplifica poniendo manifiesta la condición de ser L constante, y resulta:

$$(E\,I - R\,I^2)\,d\,t = L \cdot I \cdot d\,I$$

de donde

$$(E - R\,I)\,d\,t = L \cdot d\,I$$

Período variable. Sea un circuíto abierto de resistencia R, en el que hay una fuerza electromotriz E: si cerramos el circuíto, esa fuerza electromotriz produce una corriente, pero la intensidad no tomará inmediatamente el valor $\frac{E}{R}$ que le asigna la ley de Ohm; valdrá cero en el primer momento, y aumentará poco á poco hasta llegar al valor $I = \frac{E}{R}$ al cabo de un tiempo más ó menos largo. Entonces se llega al llamado régimen permanente, y la intensidad continuará en el mismo valor, mientras no cambien las circunstancias. Pero si estando en régimen permanente rompemos el circuíto, no se anulará de pronto la intensidad, sino que pasará de I á *o* en cierto tiempo.

Hasta aquí la experiencia.

Todo esto puede explicarse satisfactoriamente por lo que hemos estudiado. La corriente ha de crear un campo propio, y ese campo no puede formarse de un modo instantáneo, pues necesita que se le dé alguna energía; la mayor parte, pues, de la que produzca el generador en los primeros momentos, se empleará en formar el campo, y de aquí el empezar la intensidad por valores muy pequeños; á medida que el campo se va formando es menor la energía distraída para este efecto, y, por tanto, mayor la parte empleada en producir la intensidad; de donde la corriente y el campo aumentan simultáneamente, hasta quedar éste formado, tomando entonces aquélla el régimen permanente. Pero bajo el supuesto de ser constante el coeficiente de auto-inducción, el flujo propio crece

proporcionalmente á la intensidad, produciéndose por esta variación de flujo una fuerza electromotriz de auto-inducción, que dará lugar á una corriente de este nombre y de sentido contrario á la principal.

Esa fuerza electromotriz de auto-inducción disminuirá con el tiempo; pues ya sabemos que la fuerza electromotriz de inducción, en general, mide la velocidad de variación del flujo, y esta velocidad irá disminuyendo en este caso, según se vaya formando el campo propio de la corriente.

A este primer período de la existencia de una corriente se le llama período variable, y á la corriente de auto-inducción que aquí aparece *extra-corriente de cierre*.

Lo que sucede al abrir ó romper el circuíto, es un caso inverso del anterior. Se parte de estar el campo propio en completa formación; entonces, sí, desaparece de pronto la corriente principal, completamente, pero la energía acumulada en el campo actúa sobre el circuíto, produciendo un flujo propio que disminuirá incesantemente desde que se rompe el circuíto hasta agotarse la energía. Esta disminución de flujo producirá, como antes, una fuerza electromotriz y una corriente de auto-inducción, pero éstas serán contrarias á las de antes, es decir, la corriente de auto-inducción será del mismo sentido que la principal.

Por la misma razón antes expuesta, la fuerza electromotriz va en disminución, y también disminuye la intensidad hasta anularse; pero lo que ahora vemos desde el momento de romper el circuíto, no es la corriente principal, sino una corriente de auto-inducción, á la cual suele llamarse *extra-corriente de ruptura*. Queda con esto explicado en cuatro palabras el período variable de una corriente; voy á estudiar ahora las extra-corrientes analíticamente.

Extra-corriente de cierre. La fórmula antes encontrada

$$(E - R\,I)\,d\,t = L \cdot d\,I$$

puede servirnos para hallar el valor de la intensidad de la corriente al cabo de un tiempo cualquiera *t*, á contar desde que se cierra el circuíto.

Para ello preparémosla á la integración, escribiendo

$$\frac{d\,I}{E - R\,I} = \frac{d\,t}{L},$$

y siendo I_1 la intensidad en régimen permanente, tenemos

$$I_1 = \frac{E}{R} \qquad E = I_1 R \qquad E - R I = R (I_1 - I)$$

y por tanto

$$\frac{d I}{I - I_1} = - \frac{R}{L} d t$$

é integrando, desde cerrar el circuíto hasta el tiempo t,

$$\int_o^I \frac{d I}{I - I_1} = - \frac{R}{L} \int_o^t d t$$

ó sea

$$\log. \text{nep.} \frac{I - I_1}{- I_1} = - \frac{R}{L} t$$

de donde sale:

$$I = I_1 - I_1 e^{-\frac{R}{L} t} \qquad \text{(VI)}$$

que nos da el valor I para un tiempo cualquiera t.

Como se ve claramente, para tomar la intensidad el valor I_1; es decir, para que termine el período variable, es necesario que el término $I_1 e^{-\frac{R}{L} t}$ sea nulo, lo cual no podrá ser (siendo positivos R y L_1 sino cuando $t = \infty$, pues entonces $e^{-\frac{R}{L} t} = o$.

Esto nos dice que una corriente no alcanza nunca el régimen permanente, ó lo alcanzará para un tiempo infinito; pero en la práctica pronto se llega á un valor de t bastante grande, para considerar sensiblemente establecido el régimen permanente.

De la fórmula (VI) se deduce que la intensidad de la extra-corriente de cierre, opuesta á la principal, estará expresada en el tiempo t, por la fórmula

$$i = - I_1 e^{-\frac{R}{L} t} ;$$

lo cual, siendo constantes y positivos R y L, nos dice que la intensidad de la extra-corriente disminuye con el tiempo, hasta anularse para $t = \infty$; pero como sensiblemente se anula muy pronto, podemos decir que prácticamente se anula para $t = t_1$ siendo t_1 la duración sensible del período variable.

Para cualquier corriente de intensidad variable la cantidad de electricidad puesta en circulación durante un tiempo t está expresada por

$$Q = \int_o^t I \cdot d t;$$

poniendo en esta fórmula el valor de I encontrado anteriormente obtendremos:

$$Q = \int_o^{t_1} I_1 \, d t + \int_o^{t_1} - I_1 e^{-\frac{R}{L} t} \, d t =$$

$$= I_1 t_1 + I_1 \frac{L}{R} \left(e^{-\frac{R}{L} t_1} - 1 \right);$$

y teniendo presente que, para $t = t_1$ podemos considerar sensiblemente $e^{-\frac{R}{L} t} = o$, tendremos como fórmula práctica la siguiente expresión de la cantidad de electricidad puesta en circulación en el período variable:

$$Q = I_1 t_1 - I_1 \frac{L}{R}.$$

Pero si la corriente hubiese tenido siempre la intensidad I_1, la cantidad de electricidad sería $I_1 t_1$; luego la diferencia es la cantidad de electricidad que corresponde á la extra-corriente, esto es:

$$q = I_1 \frac{L}{R},$$

que aparece restada de $I_1 t_1$ porque la extra-corriente es contraria á la principal. El valor q tiene la forma de una cantidad de electricidad transportada por una corriente I_1 en un tiempo $\frac{L}{R}$, por eso se suele poner $\frac{L}{R} = \tau$, llamando á este valor *constante de tiempo.*

De modo análogo encontraríamos la energía transformada en calor durante el período variable aplicando la conocida fórmula:

$$C = R \int_o^{t_1} I^2 \, d t.$$

Tendríamos el siguiente proceso:

$$C = R \int_o^{t_1} \left(I_1^2 - 2 I_1^2 e^{-\frac{R}{L}t} + I_1^2 e^{-\frac{2R}{L}t} \right) dt =$$

$$= R I_1^2 \left[\int_o^{t_1} dt - 2 \int_o^{t_1} e^{-\frac{R}{L}t} dt + \int_o^{t_1} e^{-\frac{2R}{L}t} dt \right] =$$

$$= R I_1^2 \left[t_1 + 2 \left(\frac{L}{R} e^{-\frac{R}{L}t_1} - \frac{L}{R} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{L}{2R} e^{-\frac{2R}{L}t_1} - \frac{L}{2R} \right) \right];$$

y teniendo presente lo que antes dije de poderse tomar sensiblemente $e^{-\frac{Rt_1}{L}} = o$ cuando $t = t_1$, obtendremos la siguiente fórmula práctica:

$$C = R I_1^2 t_1 - 2 R I_1^2 \frac{L}{R} + R I_1^2 \frac{L}{2R} =$$

$$= R I_1^2 t_1 - 2 I_1^2 L + \frac{1}{2} I_1^2 L$$

$$= R I_1^2 t_1 - \frac{3}{2} I_1^2 L.$$

La energía dada por un generador cualquiera, con fuerza electromotriz E, se expresa en general por:

$$W = Q E;$$

sustituyendo el valor Q, encontrado antes, y restando la parte de energía convertida en calor durante el tiempo t_1 encontraremos la energía almacenada en el campo durante ese tiempo.

Será, pues:

$$\varepsilon = E I_1 t_1 + E I_1 \frac{L}{R} \left(e^{-\frac{Rt_1}{L}} - 1 \right) -$$

$$- R I_1^2 t_1 - 2 I_1^2 L \left(e^{-\frac{Rt_1}{L}} - 1 \right) + \frac{I_1^2 L}{2} \left(e^{-\frac{2R}{L}t_1} - 1 \right);$$

de donde, teniendo en cuenta lo que vale I_1, y admitiendo como

antes que la duración sensible del período variable sea t_1 se obtiene:

$$\varepsilon = - I_1^2 L + 2 I_1^2 L - \frac{I_1^2 L}{2} = I_1^2 L - \frac{I_1^2 L}{2} = \frac{1}{2} I_1^2 L;$$

fórmula importante, que nos dice ser esta energía almacenada en el campo durante el período variable, la misma que encontramos anteriormente bajo el nombre de energia intrínseca.

Extra-corriente de ruptura. Puede imaginarse este caso considerando suprimida repentinamente la fuerza electromotriz E que mantenía la corriente I, de régimen permanente, suponiendo sustituído el generador por un conductor de resistencia igual á la de aquel.

Esto supuesto, podemos hacer este estudio partiendo de la misma fórmula que en el anterior, con solo suprimir en ella el valor E. Será, pues:

$$- R I \, dt = L \, dI$$

de donde,

$$\frac{dI}{I} = - \frac{R}{L} dt$$

Contemos el tiempo á partir de la supresión de la fuerza electromotriz; los límites de la integración serán: para el tiempo, o y t; para la intensidad, I_1 é I.

Integrando, tenemos:

$$\int_{I_1}^{I} \frac{dI}{I} = - \frac{R}{L} \int_o^t dt,$$

ó sea

$$\frac{I}{I_1} = e^{-\frac{R}{L}t};$$

lo cual nos da para expresión de la intensidad al tiempo t

$$I = I_1 e^{-\frac{R}{L}t}$$

valor que será sensiblemente nulo para $t = t_1$, aunque teóricamente sería necesario $t = \infty$.

Es de notar aquí la igualdad entre este valor de I y el que hallamos más arriba para la extra-corriente de cierre, aunque son

de signo contrario; de donde resultan ser iguales en intensidad las extra-corrientes, para el mismo tiempo, aunque de contrario sentido.

La cantidad de electricidad transportada la hallaremos, como antes, aplicando la fórmula:

$$Q = \int_0^t I\,dt;$$

poniendo el valor de I é integrando, será:

$$Q = \int_0^t I_1 e^{-\frac{R}{L}t}\,dt = I_1 \frac{L}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

cantidad exactamente igual á la que se encuentra para la extra-corriente de cierre; y que, admitiendo la duración t_1 del período variable, nos da como fórmula práctica:

$$Q = I_1 \frac{L}{R}.$$

Análogamente hallaremos el calor producido por la extra-corriente de ruptura, teniendo:

$$C = R \int_0^{t_1} I^2\,dt = R \int_0^{t_1} I_1^2 e^{-\frac{2R}{L}t} =$$

$$= R\, I_1^2 \frac{L}{2R}\left(1 - e^{-\frac{2R}{L}t}\right)$$

ó bien prácticamente:

$$C = \frac{I_1^2 L}{2}.$$

De donde se saca la notable consecuencia de que la extra-corriente de ruptura devuelve, en forma de calor, la energía almacenada en el campo por la extra-corriente de cierre.

NOTA. Realmente suele verse la extra-corriente de ruptura cortando materialmente el circuito, y entonces aparece en forma de chispa entre los extremos del alambre; pero el estudio teórico, en estas condiciones, sería casi imposible por la dificultad de precisar la resistencia variable de la capa de aire atravesada por la chispa. Por eso me he valido, para facilitar el estudio, del artificio de suponer suprimida la fuerza electromotriz.

Sería interminable si me dejase llevar de estos estudios de aplicación, en los que se presentan problemas cada vez más variados y hermosos; pero la necesidad de terminar este trabajo me obliga á contentarme con los expuestos, y darme por satisfecho si no resultan excesivamente desaliñados.

Madrid 18 de Octubre de 1903.

Felipe N. Garín Martí.

Obtuvo la calificación de Aprobado.
Madrid 13 de Noviembre de 1903.

Francisco de P. Rojas *Bartolomé Feliu*
Francisco Cos *Luis Octavio de Toledo*
José Mª Alvarez Vivanco

BIBLIOTECA DE LA FACULTAD DE MEDICINA MADRID